Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Gerichteter Graph

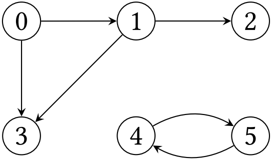
Paar $G = (V, E)$

- Knotenmenge V endlich, nichtleer (Knoten: engl. *vertex*)
- Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ (Kante: engl. *edge*)
  - also auch endlich
  - darf leer sein

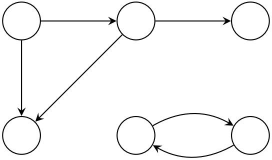
statt

- $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(0,1), (0,3), (1,2), (1,3), (4,5), (5,4)\}$

lieber



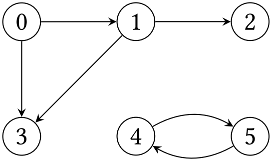
oder

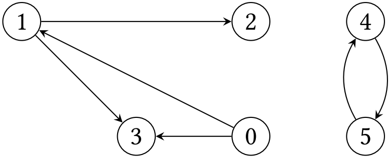


Man kann den gleichen Graphen verschieden hinmalen

Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant

zwei Darstellungen des gleichen Graphen:

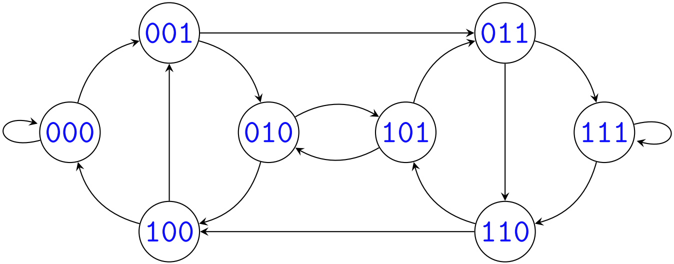
- 

- 

de Bruijn-Graphen — $V = \{0, 1\}^n$ und Kanten (xw, wy)

Beispiel $n = 3$:

- $V = \{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\} = \{(000, 000), \ldots, (010, 101), \ldots\}$



Schlinge: $(x, x) \in E$

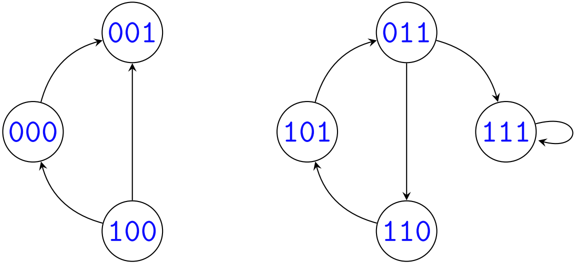
schlingenfrei: ohne Schlingen

Teilgraph

$G' = (V', E')$ ist ein Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E \cap V' \times V'$,
  - Endpunkte von Kanten in E' müssen in V' sein

Teilgraph des de Bruijn-Graphen



Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Pfade können über mehrere Kanten führen

$V^{(+)}$: Menge der nichtleeren Listen von Elementen aus V

$p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ ist *Pfad*

- wenn für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$

Länge eines Pfades: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)

v_n von v_0 *erreichbar*, wenn Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n)$ existiert

Länge 0 für Pfade erlaubt: $p = (v_0)$

Zyklen führen zum Ausgangspunkt zurück

Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen*

geschlossenener Pfad heißt *Zyklus*, wenn $n \geq 1$ ist.

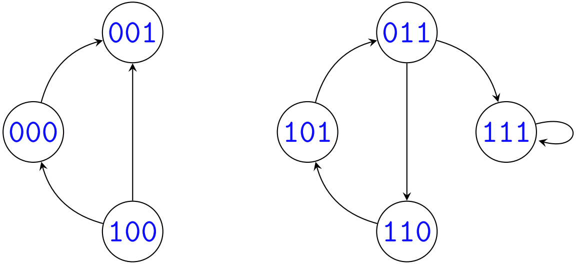
Pfad $(v_0, \ldots, v_n)$ *wiederholungsfrei*, wenn

- Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ paarweise verschieden und
- Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden
- v_0 und v_n dürfen gleich sein

einfacher Zyklus: wiederholungsfreier Zyklus

azyklischer Graph: kein Teilgraph ist Zyklus

Beispiele für Pfade



- (100) ist Pfad der Länge 0
- (100, 001) ist Pfad der Länge 1
- (100, 000, 001) ist Pfad der Länge 2
- (110, 101, 011, 111, 111, 111) ist Pfad der Länge 5
- (011, 110, 101, 011) ist einfacher Zyklus der Länge 3.

Teilpfade

Teilpfad

eines Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$

entsteht durch Streiche endlich vieler Knoten

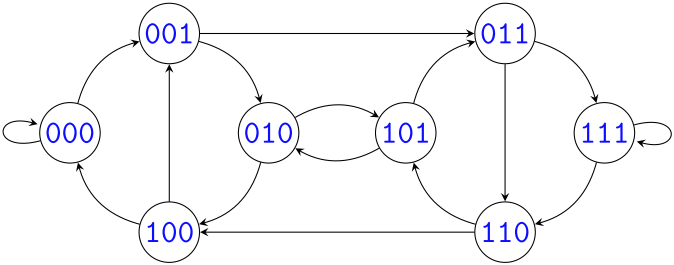
- am Anfang oder/und am Ende
- mindestens ein Knoten muss übrig bleiben

Strenger Zusammenhang

gerichteter Graph *streng zusammenhängend*

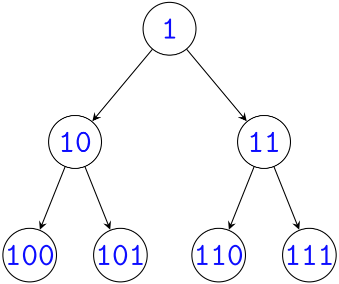
- für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ existiert Pfad von x nach y

Beispiel:



hier existieren sogar einfache Zyklen, die alle Knoten enthalten

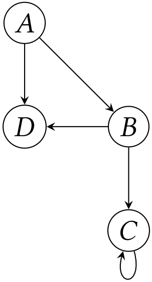
Gerichtete Bäume



es gibt eine *Wurzel* $r \in V$
mit der Eigenschaft

- *zu jedem Knoten* x existiert *genau ein Pfad*
- gleich: Wurzel immer eindeutig

Knotengrad bei gerichteten Graphen



Eingangsgrad eines Knoten y ist

$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

Ausgangsgrad eines Knoten x ist

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

Grad eines Knotens ist

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

Bäume: Blätter und innere Knoten

bei einem Baum sind

- *Blätter* Knoten mit Ausgangsgrad $= 0$
- *innere Knoten* Knoten mit Ausgangsgrad > 0

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

„Struktur“ eines Graphen — was ist das?

das, was gleich bleibt, wenn man die Knoten umbenennt

$G_1 = (V_1, E_1)$ *isomorph* zu $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn

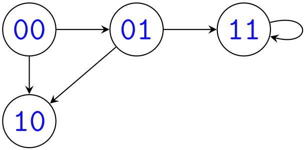
- *Bijektion* $f : V_1 \to V_2$ existiert
- mit der Eigenschaft

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

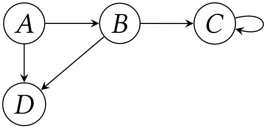
f heißt dann auch ein *(Graph-)Isomorphismus*

Beispiel:

$f(\texttt{00}) = A$
$f(\texttt{01}) = B$
$f(\texttt{11}) = C$
$f(\texttt{10}) = D$



und



Graphisomorphie hat drei wichtige Eigenschaften

Wenn G_1 isomorph zu G_2, dann auch G_2 isomorph zu G_1:

- f^{-1} leistet das Gewünschte.

Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst:

- wähle $f = \mathrm{I}_V$

Wenn G_1 isomorph zu G_2 (dank f) und
wenn G_2 isomorph zu G_3 (dank g),
dann G_1 isomorph zu G_3 (dank $g \circ f$)

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

- Graphen und Teilgraphen
- Pfade und Erreichbarkeit
- Isomorphie von Graphen
- Ein Blick zurück auf Relationen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Graphen sind Relationen — Welche Bedeutung hat das Relationenprodukt?

$G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$

- E binäre Relation auf V

Frage: Bedeutung von $E^2 = E \circ E$?

$$E \circ E = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x, y) \in E \land (y, z) \in E\}$$

Pfad der Länge 2:

- Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass
- $(v_0, v_1) \in E \land (v_1, v_2) \in E$.

also Knotenpaar (x, z)

- *genau dann* in Relation E^2,
- *wenn* Pfad (x, y, z) der Länge 2 von x nach z existiert

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

$(x, y) \in E^2 \iff$ es existiert Pfad der Länge 2 von x nach y.

noch leichter

- $(x, y) \in E^1 \iff$ es existiert Pfad der Länge 1 von x nach y.
- $(x, y) \in E^0 \iff$ es existiert Pfad der Länge 0 von x nach y.

vollständige Induktion liefert

Lemma. Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
Knotenpaar (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn in G Pfad der Länge i von x nach y vorhanden

Graphen sind Relationen — Erreichbarkeit

Korollar.
Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Knotenpaar (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn Pfad (evtl. der Länge 0) von x nach y in G existiert.

Korollar.
Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall
- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Ungerichtete Graphen — mit Kanten ohne Richtung

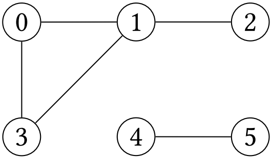
manchmal zu *jeder* Kante $(x, y) \in E$
auch «umgekehrte Kante» $(y, x) \in E$

graphische Darstellung

- der *zwei* gerichteten Kanten (x, y) und (y, x)
- durch einen Strich ohne Pfeilspitzen

Man spricht dann auch nur von einer Kante.

Beispiel



Ungerichtete Graphen — formal definiert

Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit

- V: endliche nichtleere Menge von *Knoten*
- E: Menge von *Kanten* mit

$$E \subseteq \left\{ \{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V \right\}$$

- *adjazente Knoten:* durch eine Kante miteinander verbunden
- *Schlinge*
  - Kante mit identischen Start- und Zielknoten
  - formal ergibt sich $\{x, y\}$ mit $x = y$, also einfach $\{x\}$
- Graph ohne Schlingen heißt *schlingenfrei*

Teilgraph eines ungerichteten Graphen

$U' = (V', E')$ ist *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$, wenn

- $V' \subseteq V$ und
- $E' \subseteq E \cap \{\, \{x, y\} \mid x, y \in V'\}$.
- Endpunkte jeder Kante von E' müssen zu V' gehören.

Wege — das ungerichtete Gegenstück zu Pfaden

$p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ ist *Weg*
in einem ungerichteten Graphen,

- wenn für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

Länge eines Weges: Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!)

v_n von v_0 *erreichbar*, wenn Weg $p = (v_0, \ldots, v_n)$ existiert

Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt:

- Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ paarweise verschieden und
- Knoten $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden
- v_0 und v_n dürfen gleich sein

Kreise — das ungerichtete Gegenstück zu Zyklen

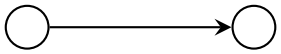
geschlossener Weg oder *Kreis:*
$p = (v_0, \ldots, v_n)$ mit $v_0 = v_n$

einfacher Kreis

- wiederholungsfreier Kreis
- *mit mindestens drei verschiedenen Knoten*

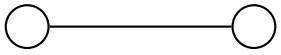
Ungerichtete Kanten und Relationen

gerichtete Graphen

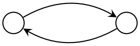


- E binäre Relation auf V
- E^i und E^* haben anschauliche Bedeutung

ungerichtete Graphen: E keine binäre Relation, aber



zu $U = (V, E)$ definiere *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$:



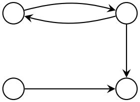
$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$$

$G_U = (V, E_g)$ der *zu U gehörende gerichtete Graph*

Zusammenhang in ungerichteten Graphen

ungerichteter Graph $U = (V, E)$ *zusammenhängend*, wenn zugehöriger gerichteter $G_U = (V, E_g)$ streng zusammenhängend

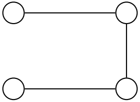
Von gerichteten zu ungerichteten Graphen — die umgekehrte Richtung ist auch nützlich



sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph

definiere

$$E_u = \{ \{x, y\} \mid (x, y) \in E\}$$



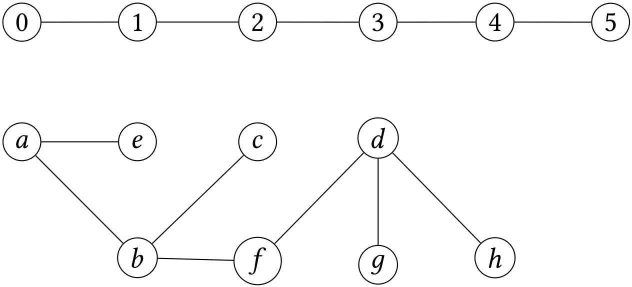
- $U_G = (V, E_u)$ ist der *zu G gehörige ungerichtete Graph*
- U entsteht aus G durch „Entfernen“ der Pfeilspitzen

Ungerichtete Bäume

(ungerichteter) Baum: ungerichteter Graph $U = (V, E)$,

- zu dem gerichteter Baum $G = (V, E')$ existiert
- mit $E = E'_u$

Beispiele



Ungerichtete Bäume

verschiedene gerichtete Bäume induzieren
gleichen ungerichteten Baum

Wurzel

- gerichtet: Wurzel eindeutig zu identifizieren
- ungerichtet
  - Von jedem Knoten führen Wege) zu jedem anderen
  - «eigentliche» Wurzel manchmal trotzdem «irgendwie klar»
  - notfalls explizit sagen

Knotengrad in ungerichteten Graphen — ein heikles Thema

Was macht man mit Schlingen?

- in der Literatur: verschiedene Vorgehensweisen

Grad $d(x)$ des Knotens $x \in V$ in ungerichtetem Graph:

$$d(x) = \left|\{y \mid y \neq x \land \{x,y\} \in E\}\right| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x,x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

- Übertragung der Grundbegriffe aus dem gerichteten Fall
- Eine Anmerkung zu Relationen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Symmetrische Relationen

Kantenrelation eines ungerichteten Graphen hat die Eigenschaft: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann immer auch $(y, x) \in E_g$.

so etwas kommt öfter vor

Relation $R \subseteq M \times M$ *symmetrisch*,
wenn für alle $x \in M$ und $y \in M$ gilt:

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

Äquivalenzrelationen

Eine Relation, die

- reflexiv,
- transitiv und
- symmetrisch

ist, heißt *Äquivalenzrelation*.

Beispiel: Isomorphie von Graphen

Beispiel: „Kongruenz modulo m“

- es sei $m \in \mathbb{N}_+$
- definiere $\equiv_m$ auf $\mathbb{Z}$ vermöge der Festlegung

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv_m y \quad \text{gdw.} \quad m \text{ teilt } |x - y|$$

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen
- Gewichtete Graphen

Graphen mit Beschriftungen

manchmal mehr als nur Graphstruktur von Interesse

- Huffman-Bäume: Symbole an Kanten, Zahlen an Knoten
- Straßenkarten: Entfernungsangaben an Kanten
- …

knotenmarkierter Graph: $G = (V, E)$ mit

- Menge M_V von *(Knoten-)Markierungen*
- *Markierungsfunktion* $m_V : V \to M_V$

kantenmarkierter Graph: $G = (V, E)$ mit

- Menge M_E von *(Kanten-)Markierungen*
- *Markierungsfunktion* $m_E : E \to M_E$

Färbungen von Graphen — formal

Färbung des Graphen:

- adjazente Knoten sollen verschiedene Farben bekommen
- Färbung $m_V : V \to M_V$ *legal*, wenn

$$\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$$

Wieviele Farben braucht man für eine legale Färbung?

- höchstens $|V|$
- mindestens?
  - dieses Problem ist im Allgemeinen *schwer*
  - es taucht z. B. im Compilerbau wieder auf

Wo sind wir?

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

- Gewichtete Graphen

Gewichtete Graphen

(Kanten-)Markierungen sind Zahlen

Beispiele

- Verkehrsnetz:
  - Kantengewichte: Entfernungen/Reisezeiten
  - Probleme: z. B. finde kürzeste/schnellste Wege
- Kabelnetz:
  - Kantengewichte: Baukosten
  - Probleme: z. B. finde billigste Möglichkeit, „alle miteinander“ zu verbinden
- Rohrleitungsnetz:
  - Kantengewichte: Rohrquerschnitte
  - Problem: z. B. finde maximal möglichen Fluss

b) Was kann man über den größten Ausgangsgrad eines Knoten eines gerichteten Graphen mit $n \geq 3$ Knoten und $m \geq 1$ Kanten sagen?

Aufgabe 7.5 (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ seien gerichtete Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ wie folgt definiert:

- $V_n = \mathbb{G}_n$ und
- $E_n = \{(x, y) \mid x, y \in V_n$ und es gibt eine Primzahl p, die sowohl x als auch y teilt$\}$
  Hinweis: Zur Definition von «Primzahl» siehe Aufgabe 3.3.

Aufgaben:

a) Für welche n ist G_n streng zusammenhängend?
b) Für welche n enthält G_n Schlingen und welche?
c) Zeichnen Sie G_9.
d) Geben Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Relation E_n^* an.
e) Es seien x und y zwei Knoten, so dass in G_n ein gerichteter Pfad von x nach y führt. Wie lang sind die kürzesten Pfade von x nach y höchstens?

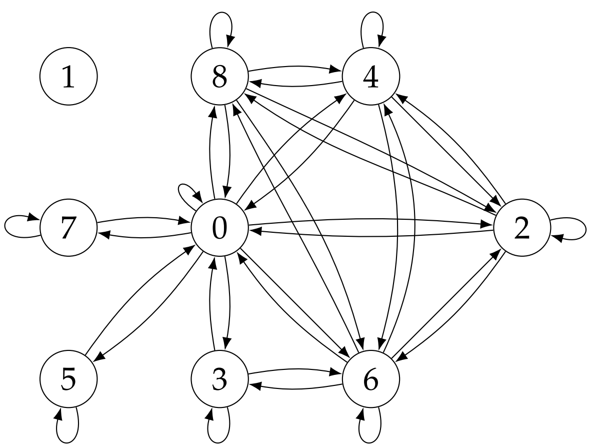
b) Für welche n enthält G_n Schlingen und welche?
c) Zeichnen Sie G_9.
d) Geben Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Relation E_n^* an.
e) Es seien x und y zwei Knoten, so dass in G_n ein gerichteter Pfad von x nach y führt. Wie lang sind die kürzesten Pfade von x nach y höchstens?

Lösung 7.5

a) Nur für $n = 1$. (Andernfalls hat man den isolierten Knoten 1.)

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ hat G_n Schlingen, nämlich an allen Knoten außer der 1 (sofern die zu G_n gehört, also falls $n \geq 2$).

c)



d) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ ist $E_n^* = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{G}_n \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 1\} \cup \{(1,1)\}$

oder anders hingeschrieben: $E_n^* = (\mathbb{G}_n \smallsetminus \{1\}) \times (\mathbb{G}_n \smallsetminus \{1\}) \cup \{(1,1)\}$

e) Die Pfade haben höchstens Länge 2.