GBI-Tutorium Nummer 9

Kontextfreie Grammatiken

Maria Schmid

07.12.2015

Kontextfreie Grammatik

Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$

- N Alphabet der Nichtterminalsymbole
- T Alphabet der Terminalsymbole
  - Dabei kann kein Zeichen in beiden Alphabeten sein
- $S \in N$ das Startsymbol
- $P \subseteq N \times V^*$ endliche Menge von Produktionen
  - $V = N \cup T$ Menge alle Symbole
  - für jedes $(X, w) \in P$ schreibt man $X \to w$
  - Bedeutung: man ersetzt X durch w

Beispiel

$G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon \mid aXb\})$

Ableitungsschritt

Ableitungsschritt mittels Produktion

$u \Rightarrow v$

- aus $u \in V^*$ ist $v \in V^*$ in einem Schritt ableitbar
- wenn $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w w_2$
- für Produktion $X \to w$ in P und Wörter $w_1, w_2 \in V^*$

Beispiel $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, P)$ mit $p = \{X \to \varepsilon \mid aXb \mid XX\}$

Dann gilt z.B. $aXbX \Rightarrow aaXbbX$
Ebenso gilt $aXbX \Rightarrow aXbaXb$

Produktion von Relationen

Definition

Es seien $R \subseteq M_x \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen

- Produkt der Relationen R und S:
  $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \text{es gibt } y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
- $\circ$ ist assoziativ:
  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- die identische Abbildung auf M als Relation I_M:
  $I_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$
- I_M neutrale Elemente bzgl. $\circ$:
  $R \circ I_{M_1} = R = I_{M_2} \circ R$

Reflexiv-transitive Hülle einer Relation

Die Vereinigung aller Potenzen

Ist $R \subseteq M \times M$ binäre Relation auf M, dann definiert man die Potenzen R^i:

$$R^0 = I_M$$

$$\text{für jedes } i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R^i \circ R$$

Die reflexiv-transitive Hülle einer Relation R ist

$$R^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$$

Reflexiv-transitive Hülle einer Relation

Eigenschaften der reflexiv-transitive Hülle

- Relation R heißt reflexiv, wenn $I_M \subseteq R$, also wenn für jedes $x \in M : xRx$
- Relation R heißt transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$, also wenn für jedes $x \in M$, jedes $y \in M$, jedes $z \in M$: wenn xRy und yRz, dann xRz.