GBI-Tutorium Nummer 9

Aussagenlogik

Maria Schmid

02.11.2015

Syntax

Eine Aussagen besteht aus:

- Aussagenvariablen: $Var_{AL} \subseteq \{P_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
  oder abgekürzt: P, Q, R, S etc
- Konnektive: $\{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
- zusammen ergibt das das Alphabet für Aussagenlogik:
  $A_{AL} = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup Var_{AL}$

Klammerregeln

Klammern dürfen weggelassen werden, aber die richtige Reihenfolge der Auswertungen muss beibehalten werden:

- $\neg$ bindet am stärksten
- $\wedge$ bindet am zweitstärksten
- $\vee$ bindet am drittstärksten
- $\rightarrow$ bindet am viertstärksten
- $\leftrightarrow$ bindet am fünftstärksten
  $\leftrightarrow$ ist eine Abkürzung für $((G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G))$

Boolsche Funktion

Boolsche Funktion und Aussagen

$f : \mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{w, f\}$ wird boolsche Funktion genannte.
Jede Aussage P hat zwei mögliche Interpretationen, wahr oder falsch.
Bei komplexen Aussagen ergeben sich die Interpretationen aus den Interpretationen der einzelnen Aussagenvariablen.
Bei k Aussagevariablen gibt 2^k mögliche Interpretationen.

Modelle und Tautologie

Modell

I ist Iterpretation einer aussalgenlogischen Formel G. I ist Modell von G, wenn $var_I(G) =$ wahr
Schreibe: $I \models G$
G ist erfüllbar, wenn es mindestens ein Modell für G.

Tautologie

G ist Tautologie, wenn alle I Modelle von G sind, also für alle I gilt:
$var_I(G) =$ wahr
Schreibe: $\models G$

Beweisbarkeit

Modus Ponens

Seien G und H aussagenlogische Formeln, so besagt der Modus Ponens: wenn $G \rightarrow H$ wahr und G wahr, dann ist auch H wahr.
Schreibe: $\frac{G \rightarrow H \quad G}{H}$

Aufbau eines Beweises

Man benötigt für einen Beweis

- Axiome A_x
- Schlussregeln, bei und der Modus Ponens

Eine Aussage H, welche durch Anwendung von Axiomen und Schlussregen beweisbar ist heißt Theorem.

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass A_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist.

Aufbau

- IA (Induktionsanfang): zeige, dass A_0 gilt
- IV (Induktionsvoraussetzung): für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt A_n
- IS (Induktionsschluss): zeige mit IV, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn A_n gilt, dann gilt auch A_{n+1}

Varianten:

- nicht bei $n = 0$ anfangen, sondern „später", z.B. bei $n = 5$
- IS nicht von n nach $n + 1$ sondern z.B. von n nach $n + 2$