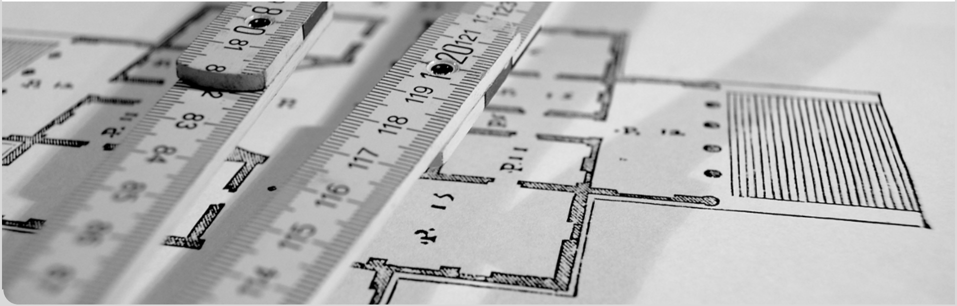
Karlsruher Institut für Technologie

Grundbegriffe der Informatik
Automaten

Maria Schmid | 01.02.2016

KIT - KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE



Inhaltsverzeichnis

Informationen zum nächsten Blatt

Karlsruher Institut für Technologie

Blatt Nr.12

Abgabetermin	05.02.2016 um 12:30 Uhr
Abgabeort	Briefkasten
Themen	Automaten
Maximale Punkte	20
Gesamtpunkte	214

Übungsschein und Klausur

- Klausur- und Übungsscheinanmeldung offen.
  Bei Problemem bitte direkt Herr Worsch anschreiben.

Übungsschein und Klausur

- Klausur- und Übungsscheinanmeldung offen.
  Bei Problemem bitte direkt Herr Worsch anschreiben.
- Übungsschein bestanden?
  - grüner Punkt oder über 107 Punkte: auf jeden Fall bestanden
  - orangener Punkt oder über 87 Punkte: mit dem nächsten Blatt machbar
  - roter Punkt oder unter 87 Punkte: leider nicht bestanden

Übungsschein und Klausur

- Klausur- und Übungsscheinanmeldung offen.
  Bei Problemem bitte direkt Herr Worsch anschreiben.
- Übungsschein bestanden?
  - grüner Punkt oder über 107 Punkte: auf jeden Fall bestanden
  - orangener Punkt oder über 87 Punkte: mit dem nächsten Blatt machbar
  - roter Punkt oder unter 87 Punkte: leider nicht bestanden
- Ob ihr den Übungsschein bestanden habt oder nicht: Klausur schreiben.

Übungsschein und Klausur

- Klausur- und Übungsscheinanmeldung offen.
  Bei Problemem bitte direkt Herr Worsch anschreiben.
- Übungsschein bestanden?
  - grüner Punkt oder über 107 Punkte: auf jeden Fall bestanden
  - orangener Punkt oder über 87 Punkte: mit dem nächsten Blatt machbar
  - roter Punkt oder unter 87 Punkte: leider nicht bestanden
- Ob ihr den Übungsschein bestanden habt oder nicht: Klausur schreiben.
- Zum lernen: am besten 2 Wochen einplanen.
- Materialien: Skript, Folien, Übungsblätter (Archiv), Altklausuren (Archiv)

Übungsschein und Klausur

- Klausur- und Übungsscheinanmeldung offen.
  Bei Problemem bitte direkt Herr Worsch anschreiben.
- Übungsschein bestanden?
  - grüner Punkt oder über 107 Punkte: auf jeden Fall bestanden
  - orangener Punkt oder über 87 Punkte: mit dem nächsten Blatt machbar
  - roter Punkt oder unter 87 Punkte: leider nicht bestanden
- Ob ihr den Übungsschein bestanden habt oder nicht: Klausur schreiben.
- Zum lernen: am besten 2 Wochen einplanen.
- Materialien: Skript, Folien, Übungsblätter (Archiv), Altklausuren (Archiv)
- Wenn Fragen beim Lernen aufkommen dürft ich gerne mir eine Email schicken oder zu den Sprechstunden von
  Herr Worsch und Herr Wacker gehen.

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$
- ... einem Ausgabealphabet Y

Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ besteht aus ...

- ... einer endlichen Zustandsmenge Z
- ... einem Startzustand z_0. Dieser wird mit einem kleinen Pfeil gekennzeichnet.
- ... einem Eingabealphabet X
- ... einer Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \to Z$
- ... einem Ausgabealphabet Y
- ... einer Ausgabefunktion $g : Z \times X \to Y^*$

Eingabe eines Zeichens

Was ist die Zustandsübergangsfunktion f?

Eingabe eines Zeichens

Was ist die Zustandsübergangsfunktion f?
Bei Eingabe eines Symbols $x \in X$ und des aktuellen Zustands $z \in Z$ gibt uns die Zustandsübergangsfunktion an, in welchen Zustand z' der Automat dann sein wird.

Eingabe eines Zeichens

Was ist die Zustandsübergangsfunktion f?
Bei Eingabe eines Symbols $x \in X$ und des aktuellen Zustands $z \in Z$ gibt uns die Zustandsübergangsfunktion an, in welchen Zustand z' der Automat dann sein wird.
Formell:

$$f(z, x) = z'$$

Eingabe eines Zeichens

Karlsruher Institut für Technologie

Was ist die Zustandsübergangsfunktion f?
Bei Eingabe eines Symbols $x \in X$ und des aktuellen Zustands $z \in Z$ gibt uns die Zustandsübergangsfunktion an, in welchen Zustand z' der Automat dann sein wird.
Formell:

$$f(z, x) = z'$$

Graphisch: Zustände sind Knoten und Übergänge gerichtete Kanten in einem Graphen!

Eingabe eines Wortes

Was machen wir mit ganzen Wörtern?

Eingabe eines Wortes

Karlsruher Institut für Technologie

Was machen wir mit ganzen Wörtern?
Wir definieren uns ganz analog

Zustandsübergangsfunktion extended

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Eingabe eines Wortes

Was machen wir mit ganzen Wörtern?
Wir definieren uns ganz analog

Zustandsübergangsfunktion extended

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?

Eingabe eines Wortes

Was machen wir mit ganzen Wörtern?
Wir definieren uns ganz analog

Zustandsübergangsfunktion extended

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Bei Eingabe eines Wortes w und Anfangszustand z gibt sie den Zustand $z' = f^*(z, w)$ aus, in dem der Automat enden wird.

Eingabe eines Wortes

Definieren wir nun weiter

Zustandsübergangsfunktion extended extended

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Eingabe eines Wortes

Definieren wir nun weiter

Zustandsübergangsfunktion extended extended

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$

$$\forall w \in X^* \ \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?

Eingabe eines Wortes

Definieren wir nun weiter

Zustandsübergangsfunktion extended extended

$$f^{**}(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall w \in X^* \; \forall x \in X : f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f(f^*(z, w), x)$$

Was macht diese Funktion?
Diese Funktion gibt die Reihe aller Zustände aus, die der Automat bei Eingabe des Wortes w im Startzustand z durchläuft.

Beispiel: Ein Getränkeautomat

R sei reines Wasser, Z ist Zitronenlimonade, C ist Clear, 1 ist die Eingabe von einer Münze mit Wertigkeit 1 und 0 sei Geldausgabe.
Wir wollen:

- Getränk wählen können

Beispiel: Ein Getränkeautomat

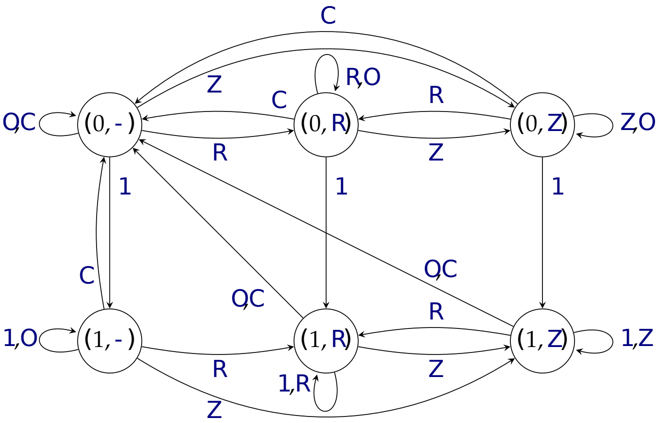
R sei reines Wasser, Z ist Zitronenlimonade, C ist Clear, 1 ist die Eingabe von einer Münze mit Wertigkeit 1 und 0 sei Geldausgabe.
Wir wollen:

- Getränk wählen können
- Geld rein- und rausholen können

Beispiel: Ein Getränkeautomat

R sei reines Wasser, Z ist Zitronenlimonade, C ist Clear, 1 ist die Eingabe von einer Münze mit Wertigkeit 1 und 0 sei Geldausgabe.
Wir wollen:

- Getränk wählen können
- Geld rein- und rausholen können
- und immer zurück kommen können!



Was macht $f((0,-),Z), f^*((0,-),R10), f^{**}((0,-),R10)$? Rechnerisch und graphisch.

Rechnerisch nur der 3. Fall:

$$
\begin{aligned}
f^{**}((0,-),R10) =&f^{**}((0,-),R1)) \cdot f(f^{*}((0,-),R1),0)\\
=&f^{**}((0,-),R) \cdot f(f^{*}((0,-),R),1)\\
&\cdot f(f^{*}((0,-),R1),0)\\
=&f^{**}((0,-),\varepsilon) \cdot f(f^{*}((0,-),\varepsilon),R)\\
&\cdot f(f^{*}((0,-),R),1) \cdot f(f^{*}((0,-),R1),0)\\
=&(0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f(f^{*}((0,-),\varepsilon),R),1)\\
&\cdot f(f(f^{*}((0,-),R),1),0)\\
=&(0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f((0,-),R),1)\\
&\cdot f(f(f(f^{*}(0,-),\varepsilon),R),1),0)\\
=&(0,-) \cdot f((0,-),R) \cdot f(f((0,-),R),1)\\
&\cdot f(f(f((0,-),R),1),0)\\
=&(0,-) \cdot (0,R) \cdot (1,R) \cdot (0,-)
\end{aligned}
$$

Ausgabe

Nun betrachten wir einen Automaten mit Ausgabemöglichkeit. Die Kanten sind nun beschriftet mit $x|y$, wobei $x \in X, y \in Y^*$. Also wird bei Eingabe von x das Wort y ausgegeben.
Formal:

$$g(z, x) = y$$

Ausgabefunktionen extended

Wir können also analog zu f^* und f^{**} definieren

$$g^* : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^*(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^*(z, wx) = g(f^*(z, w), x)$$

$$g^{**} : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^{**}(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^{**}(z, wx) = g^{**}(z, w) \cdot g^*(z, wx)$$

Ausgabefunktionen extended

Wir können also analog zu f^* und f^{**} definieren

$$g^* : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^*(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^*(z, wx) = g(f^*(z, w), x)$$

$$g^{**} : Z \times X^* \to Y^*$$
$$g^{**}(z, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in X^* \forall x \in X : g^{**}(z, wx) = g^{**}(z, w) \cdot g^*(z, wx)$$

Dies gibt nun nicht die durchlaufenen Zustände bzw den Abschlußzustand an, sondern die letzte Ausgabe bzw alle durchlaufenen Ausgaben.

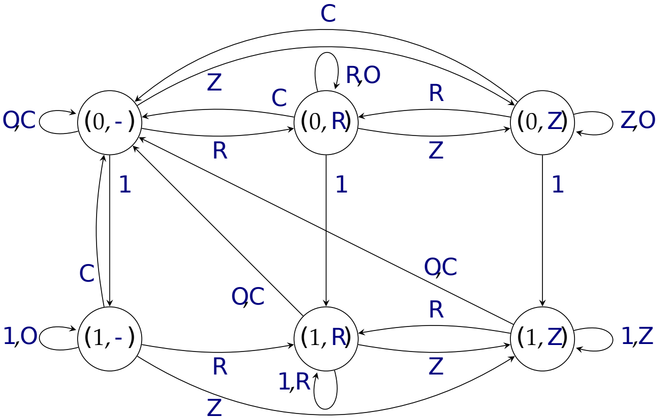
Beispiel II

Karlsruher Institut für Technologie

Wir wollen jetzt also auch noch

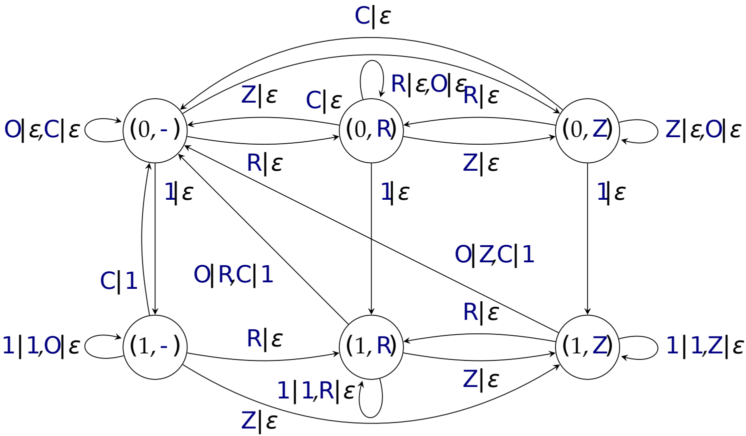
- Ausgeben, ob wir Geld zurück bekommen
- Ausgeben, ob wir ein Getränk bekommen

Der Getränkeautomat mit Ausgaben



Was macht $g^*((0,-), R10), g^{**}((0,-), R10), g^{**}((0,-), R110)$?

Der Getränkeautomat mit Ausgaben



Was macht $g^*((0,-),R10), g^{**}((0,-),R10), g^{**}((0,-),R110)$?

Aufgabe 1

Gegeben sei folgender Mealy-Automat

$$Z = \{z\}, X = Y = \{a, b\}, g(z, a) = b, g(z, b) = ba$$

- Zeichnen Sie den Automaten, überlegen Sie sich hierzu wie die Übergangsfunktion aussieht.
- Wie lautet

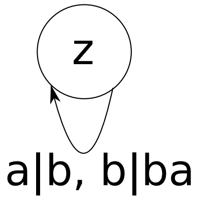
$$w_1 = g^{**}(z, a)$$

- Wie lautet

$$w_2 = g^{**}(z, w_1), \ldots, w_{i+1} = g^{**}(z, w_i)$$

- Was passiert hierbei mit den Längen?

Lösung



Lösung

$$
\begin{aligned}
w_1 = g^{**}(z, a) &= g^{**}(z, \varepsilon) \cdot g^{*}(z, wx) \\
&= g(f^{*}(z, \varepsilon), a) = g(z, a) = b
\end{aligned}
$$

Lösung

$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$

Lösung

$$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$$
$$w_3 = g^{**}(z, ba) = g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) = g(z, b) \cdot g(z, a) = bab$$

Lösung

$$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$$
$$w_3 = g^{**}(z, ba) = g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) = g(z, b) \cdot g(z, a) = bab$$
$$w_4 = g^{**}(z, bab) = g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, b) = babba$$

Lösung

$$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$$
$$w_3 = g^{**}(z, ba) = g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) = g(z, b) \cdot g(z, a) = bab$$
$$w_4 = g^{**}(z, bab) = g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, b) = babba$$
$$w_5 = \mathbf{babba}bab \qquad w_6 = \mathbf{babbabab}babba = w_5 \cdot w_4$$

Lösung

$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$

$w_3 = g^{**}(z, ba) = g^{**}(z, b) \cdot g^{*}(z, a) = g(z, b) \cdot g(z, a) = bab$

$w_4 = g^{**}(z, bab) = g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, b) = babba$

$w_5 = \mathbf{babba}bab \qquad w_6 = \mathbf{babbabab}babba = w_5 \cdot w_4$

$w_{i+1} = w_i \cdot w_{i-1}$

Lösung

$w_2 = g^{**}(z, b) = g(z, b) = ba$
$w_3 = g^{**}(z, ba) = g^{**}(z, b) \cdot g^*(z, a) = g(z, b) \cdot g(z, a) = bab$
$w_4 = g^{**}(z, bab) = g(z, b) \cdot g(z, a) \cdot g(z, b) = babba$
$w_5 = \mathbf{babba}bab \qquad w_6 = \mathbf{babbabab}babba = w_5 \cdot w_4$
$w_{i+1} = w_i \cdot w_{i-1}$
Für die Länge gilt

$$|w_{i+1}| = |w_i| + |w_{i-1}|$$

Moore-Automat

Ein Moore-Automat ist das Gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.

Moore-Automat

Ein Moore-Automat ist das Gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.
Die Ausgabefunktion ist insofern auch einfacher. Wir definieren uns $h : Z \to Y$, die uns die Ausgabe im Zustand $z \in Z$ liefert. Dann ist

$$g^*(z, w) = h(f^*(z, w))$$

Moore-Automat

Ein Moore-Automat ist das Gleiche wie ein Mealy-Automat mit dem einzigen Unterschied, dass die Ausgabe im Zustand erfolgt und nicht beim Zustandsübergang.
Die Ausgabefunktion ist insofern auch einfacher. Wir definieren uns $h : Z \to Y$, die uns die Ausgabe im Zustand $z \in Z$ liefert. Dann ist

$$g^*(z, w) = h(f^*(z, w))$$

Für g^{**} gilt dann mit $h^{**} : Z^* \to Y$

$$g^{**}(z, w) = h^{**}(f^{**}(z, w))$$

Heißt also, dass wir einfach nur h auf jeden durchlaufenen Zustand anwenden.

Definition

Endlicher Akzeptor

Ein endlicher Akzeptor ist ein Moore-Automat mit $Y = \{0, 1\}$, der 1 ausgibt, falls das eingegebene Wort der vorliegeneden Syntax entspricht und 0 sonst.

Notation : Wir kennzeichnen den akzeptieren Zustand mit einem zweiten Kreis und lassen die Ausgabe im Zustandsnamen weg.

Definition

Endlicher Akzeptor

Ein endlicher Akzeptor ist ein Moore-Automat mit $Y = \{0, 1\}$, der 1 ausgibt, falls das eingegebene Wort der vorliegeneden Syntax entspricht und 0 sonst.

Notation : Wir kennzeichnen den akzeptieren Zustand mit einem zweiten Kreis und lassen die Ausgabe im Zustandsnamen weg.
Wir sprechen von einer akzeptierten Sprache über einem Alphabet. Sie ist definiert als

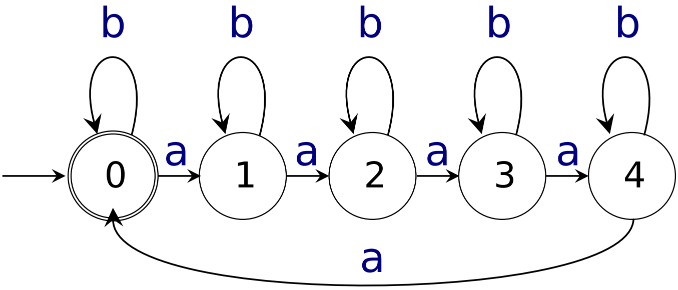
$$L = \{w | g^*(z_0, w) = 1\}$$

Also sind in einer akzeptierten Sprache alle Wörter, die akzeptiert werden. L ist eine formale Sprache.

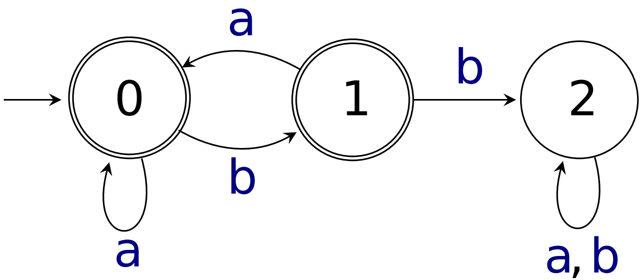
Aufgabe

- Zeichnen Sie einen möglichst kleinen endlichen Akzeptor mit $X = \{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, bei denen die Anzahl der a durch 5 teilbar ist.
- Zeichnen Sie einen Akzeptor mit $X = \{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, in denen nirgends hintereinander zwei b vorkommen.

Lösung



- Zeichnen Sie einen Akzeptor mit $X = \{a.b\}$, der alle Wörter akzeptieren, in denen nirgends hintereinander zwei b vorkommen.


a
b
0
1
2
b
a
a, b

Gibt es einen endlichen Akzeptor mit

$$L = \{a^k b^k | k \in \mathbb{N}_0\}$$

Wenn nein, warum nicht?

1 Übungsblätter

2 Automaten

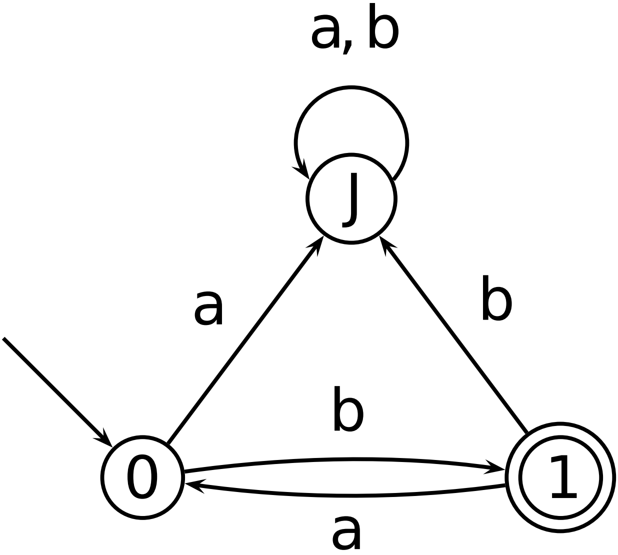
3 Klausur

WiSe 10/11 Aufgabe 6 c

Die Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ sei definiert als die Menge aller Wörter w, die folgende Bedingungen erfüllen

$$N_b(w) > N_a(w)$$
$$\forall v_1, v_2 \in \{a, b\}^* : w \neq v_1 bb v_2$$

Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.


a, b
J
a
b
b
0
1
a